

# Algorithme Branch-and-Bound pour le démixage spectral parcimonieux

Mehdi Latif

Master 2 — Optimisation en Recherche Opérationnelle

**Encadrants** : Sébastien Bourguignon, Ramzi Ben Mhenni

LS2N Centrale Nantes — Equipe Signal IMage et Son (SIMS)

3 juillet 2020



- 1 Introduction générale au problème de démixtion spectrale
  - Formulation du problème de démixtion
  - Contrainte de parcimonie, de non négativité et de somme unitaire.
  - Positionnement de ces travaux.
- 2 Algorithme de B&B pour le démixtion spectrale
  - Reformulation MIP
  - Impact des branchements sur le problème de démixtion.
  - Stratégies de recherche, de branchement et de dominance.
- 3 Mise en œuvre de l'algorithme de B&B
  - Principes de branchements et spécificités des nœuds.
  - Précision sur les opérations du B&B
  - Exécution du B&B sur un problème avec  $K = 3$
- 4 Stratégies pour l'obtention de bornes inférieures
  - Résolution de problèmes d'optimisation quadratique.
  - Méthode de continuation homotopique
  - Algorithme de résolution pour les problèmes FCLS
- 5 Expérimentations numériques
  - Analyses des résultats
  - Profils de performances
- 6 Conclusions et perspectives

- 1 Introduction générale au problème de démixage spectral
  - Formulation du problème de démixage
  - Contrainte de parcimonie, de non négativité et de somme unitaire.
  - Positionnement de ces travaux.
- 2 Algorithme de B&B pour le démixage spectral
  - Reformulation MIP
  - Impact des branchements sur le problème de démixage.
  - Stratégies de recherche, de branchement et de dominance.
- 3 Mise en œuvre de l'algorithme de B&B
  - Principes de branchements et spécificités des nœuds.
  - Précision sur les opérations du B&B
  - Exécution du B&B sur un problème avec  $K = 3$
- 4 Stratégies pour l'obtention de bornes inférieures
  - Résolution de problèmes d'optimisation quadratique.
  - Méthode de continuation homotopique
  - Algorithme de résolution pour les problèmes FCLS
- 5 Expérimentations numériques
  - Analyses des résultats
  - Profils de performances
- 6 Conclusions et perspectives

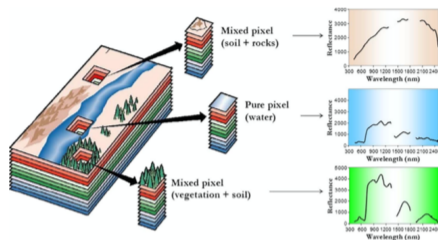


FIGURE – Principe de l'imagerie spectrale pour l'observation au sol - [Iordache et al., 2011]

- L'imagerie hyperspectrale correspond à la mesure, en plusieurs positions spatiales, de la réflectance lumineuse ;
- En chaque pixel ainsi mesuré, le spectre de réflectance correspond à la superposition de différentes composantes ;
- Le spectre obtenu pour chaque pixel observé peut être expliqué comme un **mélange** de spectres associés à des composants (*atomes*) pondérés par leurs proportions (*abondances*)



## Hypothèse [Singer and McCord, 1979]

Le mélange d'un pixel peut être exprimé comme une combinaison linéaire de signatures spectrales pures pondérées par les abondances de chaque atome.

La composition d'un pixel peut alors être exprimée par le modèle linéaire :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{x} + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} = \sum_{q \in Q} \mathbf{h}_q x_q + \varepsilon$$

avec :

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  est un vecteur colonne de  $N$  observations nommé spectre de réflectance ;

$\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times Q}$  est un dictionnaire contenant  $Q$  spectres de référence observés sur  $N$  bandes spectrales ;

$\mathbf{h}_q \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  la  $q$ -ème colonne du dictionnaire  $\mathbf{H}$  correspondant à un atome ;

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{Q \times 1}$  est un vecteur contenant les abondances des  $Q$  signatures spectrales composant le pixel ;

$\varepsilon \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  un vecteur de bruit ajouté au modèle.

Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^Q$  le vecteur des abondances solution du problème de démixtion :

## Contrainte de non négativité

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_q \geq 0 \quad \forall q \in Q$$

## Contrainte de somme unitaire

$$\mathbf{1}_Q^\top \mathbf{x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{q \in Q} x_q \leq 1$$

**Idée générale :** Ce sont des contraintes physiques :

- pour exprimer les abondances  $\mathbf{x}$  comme des **pourcentages** ;
- le spectre ne peut être négatif et les abondances sont des coefficients qui s'ajoutent au modèle ;
- comme nous ne mesurons qu'une partie de la lumière observée, la somme peut donc être inférieure à 1.

Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^Q$  un vecteur solution au problème de démixtion :

Le support de  $\mathbf{x}$

$$\text{supp}(\mathbf{x}) := \{q \in Q : x_q \neq 0\}.$$

La norme  $\ell_0$  - fonction de comptage

$$\|\mathbf{x}\|_0 := \text{card}(\{q \in Q | x_q \neq 0\}).$$

Note : Abus de langage,  $\ell_0$  n'est pas une norme.

Vecteur parcimonieux

Un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^Q$  est dit  $K$ -sparse si  $\|\mathbf{x}\|_0 \leq K$ .

**Idée générale :** Le caractère parcimonieux de  $\mathbf{x}$  répond à des contraintes physiques e.g. un nombre limité de composants dans le mélange.

Formulation mathématique de  $\mathcal{P}_{2/0}$  :

$$\min_{\mathbf{x} \in [0,1]^Q} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \|\mathbf{x}\|_0 \leq K, \quad \mathbf{1}_Q^\top \mathbf{x} \leq 1 \quad (\mathcal{P}_{2/0})$$

avec  $K$  le coefficient de parcimonie fixé *a priori*, typiquement  $K \in \llbracket 3, 7 \rrbracket$

- Problèmes avec contrainte en *norme*  $\ell_0$  :  $\mathcal{NP}$ -difficile [Natarajan, 1995]
- Force brute :  $Q = 200$  et  $K = 5 \rightarrow$  tester  $\binom{200}{5}$  combinaisons d'atomes possibles

Formulation mathématique de  $\mathcal{P}_{2/0}$  :

$$\min_{\mathbf{x} \in [0,1]^Q} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \|\mathbf{x}\|_0 \leq K, \quad \mathbf{1}_Q^\top \mathbf{x} \leq 1 \quad (\mathcal{P}_{2/0})$$

avec  $K$  le coefficient de parcimonie fixé *a priori*, typiquement  $K \in \llbracket 3, 7 \rrbracket$

## Stratégies sous-optimales

[Tropp and Wright, 2010], [Iordache et al., 2011]

Résolution gloutonne, OMP, ...

Relaxation convexe de  $\ell_0$  par  $\ell_1$  (BP)

→ Méthodes rapides **mais** approchées

## Stratégies exactes

[Ben Mhenni, 2020], Equipe SIMS :

Formulation MIP de ce problème

Utilisation de solveurs génériques

→ Solutions de meilleures qualités **mais** possibles seulement sur de petits problèmes

### Notre objectif

- Résoudre le problème de démixage parcimonieux sous contrainte de non-négativité et de somme unitaire par une approche **exacte** est possible par la formulation MIP mais trop coûteuse ;
- Etre plus efficace qu'un solveur MIP générique pour pouvoir réduire le temps de calcul et résoudre exactement des problèmes plus complexes ;

- 1 Introduction générale au problème de démixtion spectrale
  - Formulation du problème de démixtion
  - Contrainte de parcimonie, de non négativité et de somme unitaire.
  - Positionnement de ces travaux.
- 2 Algorithme de B&B pour le démixtion spectrale
  - Reformulation MIP
  - Impact des branchements sur le problème de démixtion.
  - Stratégies de recherche, de branchement et de dominance.
- 3 Mise en œuvre de l'algorithme de B&B
  - Principes de branchements et spécificités des nœuds.
  - Précision sur les opérations du B&B
  - Exécution du B&B sur un problème avec  $K = 3$
- 4 Stratégies pour l'obtention de bornes inférieures
  - Résolution de problèmes d'optimisation quadratique.
  - Méthode de continuation homotopique
  - Algorithme de résolution pour les problèmes FCLS
- 5 Expérimentations numériques
  - Analyses des résultats
  - Profils de performances
- 6 Conclusions et perspectives

**Objectif :** proposer des solutions exactes à un problème d'optimisation pour lequel l'espace de recherche est complexe à explorer.

**Principe :** réaliser une énumération implicite de l'ensemble des solutions réalisables en résolvant une série de problèmes relâchés et en restreignant l'espace de recherche.

### Deux opérations :

**Le branchement :** consiste à diviser un problème complexe en sous-problèmes disjoints plus simples à résoudre, constituant un arbre de recherche.

**L'évaluation :** permet de réduire l'espace de recherche en élaguant les sous-problèmes n'ayant pas la solution optimale, permettant d'éviter une *énumération explicite* de toutes les solutions du problème.

### Ingrédients supplémentaires :

**Algorithmes de résolutions :** pour l'obtention de bornes inférieures permettant l'élagage de certains nœuds de l'arbre par comparaison avec une borne supérieure globale.

**Une série de règles :** pour le branchement, l'ordre d'évaluation des nœuds et l'élagage.



Notre problème initial :

$$\min_{\mathbf{x} \in [0,1]^Q} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \|\mathbf{x}\|_0 \leq K, \quad \mathbf{1}_Q^\top \mathbf{x} \leq 1 \quad (\mathcal{P}_{2/0})$$

Principe de reformulation en MIP :

Introduire des variables binaires  $\mathbf{b} \in \{0, 1\}^Q$  exprimant la contrainte logique :

$$x_q = 0 \Leftrightarrow b_q = 0 \quad \forall q \in Q$$

Réécriture de la norme  $\ell_0$  comme somme des  $b_q \forall q \in Q$  :

$$\|\mathbf{x}\|_0 = \sum_{q \in Q} b_q \text{ et } \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1$$

Notre problème initial :

$$\min_{\mathbf{x} \in [0,1]^Q} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \|\mathbf{x}\|_0 \leq K, \quad \mathbf{1}_Q^\top \mathbf{x} \leq 1 \quad (\mathcal{P}_{2/0})$$

Notre nouveau problème MIP :

$$\min_{\substack{\mathbf{x} \in [0,1]^Q \\ \mathbf{b} \in \{0,1\}^Q}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \sum_{q \in Q} b_q \leq K, \quad \mathbf{1}_Q^\top \mathbf{x} \leq 1, \quad \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (\hat{\mathcal{P}}_{2/0})$$

⇒  $\hat{\mathcal{P}}_{2/0}$  est un MIP pouvant être résolu par un algorithme branch-and-bound :

- **générique** → performant mais insensible aux spécificités de  $\hat{\mathcal{P}}_{2/0}$  e.g. Cplex MIQP, ...
- **dédié** → exact et rapide usant des propriétés mathématiques de  $\hat{\mathcal{P}}_{2/0}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^Q$  un solution au problème  $\hat{\mathcal{P}}_{2/1}$  et la formulation du problème relâché  $\hat{\mathcal{P}}_{2/1}$  en un noeud :

$$\min_{\substack{x \in [0,1]^Q \\ b \in [0,1]^Q}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \sum_{q \in Q} b_q \leq K, \quad \mathbf{1}_Q^\top \mathbf{x} \leq 1, \quad \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (\hat{\mathcal{P}}_{2/1})$$

## Remarque

L'ajout des variables binaires  $\mathbf{b}$  et leurs relaxations ne modifient pas la solution du problème  $\hat{\mathcal{P}}_{2/1}$

**Preuve :** par l'absurde en supposant qu'à l'optimum du problème relâché  $\hat{\mathcal{P}}_{2/1}$ , il existe une composante  $q' \in Q$  telle que  $|x_{q'}^*| < b_{q'}$ .

## Notations ensemblistes :

$\mathbb{S} = \llbracket 1, n \rrbracket$  : l'ensemble des indices des variables associées aux colonnes du dictionnaire ;

$\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{S}$  : l'ensemble des indices des variables assignées à 1 défini tel que  $\mathbb{S}_1 = \{i | b_i = 1\}$  avec  $n_1 = \text{card}(\mathbb{S}_1)$  ;

$\mathbb{S}_0 \subseteq \mathbb{S}$  : l'ensemble des indices des variables assignées à 0 défini tel que  $\mathbb{S}_0 = \{i | b_i = 0\}$  ;

$\bar{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{S}$  : l'ensemble des indices des variables non assignées défini tel que  $\bar{\mathbb{S}} = \mathbb{S} \setminus \{\mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_0\}$  avec  $\bar{n} = \text{card}(\bar{\mathbb{S}})$

L'expression du problème relâché  $\hat{\mathcal{P}}_{2/1}$  en un nœud quelconque :

$$\begin{aligned}
 (\hat{\mathcal{P}}_{2/1}) \quad & \min_{\substack{\mathbf{b}_{\bar{\mathbb{S}}} \in [0,1]^{\bar{n}}, \mathbf{x}_{\bar{\mathbb{S}}} \in [0,1]^{\bar{n}} \\ \mathbf{x}_{\mathbb{S}_1} \in [0,1]^{n_1}}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_{\mathbb{S}_1} \mathbf{x}_{\mathbb{S}_1} - \mathbf{H}_{\bar{\mathbb{S}}} \mathbf{x}_{\bar{\mathbb{S}}}\|_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \sum_{i \in \bar{\mathbb{S}}} b_i \leq K - \text{card}(\mathbb{S}_1) \\
 & 0 \leq x_i \leq b_i \quad \forall i \in \bar{\mathbb{S}} \\
 & \sum_{i \in \mathbb{S}} x_i \leq 1
 \end{aligned}$$

**Remarque :**  $\hat{\mathcal{P}}_{2/1}$  est le problème relâché que nous allons résoudre en chaque nœud de notre arbre pour obtenir des bornes inférieures.

$$(\hat{\mathcal{P}}_{2/1}) \min_{\substack{\mathbf{b}_{\bar{\mathbb{S}}} \in [0,1]^{\bar{n}}, \mathbf{x}_{\bar{\mathbb{S}}} \in [0,1]^{\bar{n}} \\ \mathbf{x}_{\mathbb{S}_1} \in [0,1]^{n_1}}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_{\mathbb{S}_1} \mathbf{x}_{\mathbb{S}_1} - \mathbf{H}_{\bar{\mathbb{S}}} \mathbf{x}_{\bar{\mathbb{S}}}\|_2^2 \text{ s.c. } \sum_{i \in \bar{\mathbb{S}}} b_i \leq K - \text{card}(\mathbb{S}_1), 0 \leq x_i \leq b_i \forall i \in \bar{\mathbb{S}}, \sum_{i \in \mathbb{S}} x_i \leq 1$$

## Propriété de parcimonie inactive

A l'optimum de tout problème relâché  $\hat{\mathcal{P}}_{2/1}$ , la contrainte de parcimonie est non active car dominée par contrainte de somme unitaire; elle peut alors être retirée de l'expression du problème.

**Preuve :** Montrer que pour le problème sans contrainte de parcimonie  $\hat{\mathcal{P}}'_{2/1}$

$$\exists \left( \tilde{\mathbf{b}}_{\bar{\mathbb{S}}}^0, \mathbf{x}_{\bar{\mathbb{S}}}^0, \mathbf{x}_{\mathbb{S}_1}^0 \right) \in \text{Argmin}(\hat{\mathcal{P}}_{2/1}) \text{ tel que } \sum_{i \in \bar{\mathbb{S}}} \tilde{b}_i^0 \leq 1 \Rightarrow \left( \tilde{\mathbf{b}}_{\bar{\mathbb{S}}}^0, \mathbf{x}_{\bar{\mathbb{S}}}^0, \mathbf{x}_{\mathbb{S}_1}^0 \right) \in \text{Argmin}(\hat{\mathcal{P}}'_{2/1})$$

Expression du problème  $\hat{\mathcal{P}}_{2/1}$  sans contrainte de parcimonie :

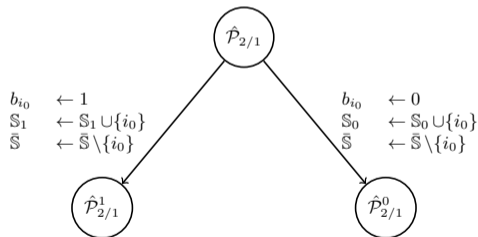
$$(\hat{\mathcal{P}}_{2/1}) \min_{\substack{\mathbf{b}_{\bar{\mathbb{S}}} \in [0,1]^{\bar{n}}, \mathbf{x}_{\bar{\mathbb{S}}} \in [0,1]^{\bar{n}} \\ \mathbf{x}_{\mathbb{S}_1} \in [0,1]^{n_1}}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_{\mathbb{S}_1} \mathbf{x}_{\mathbb{S}_1} - \mathbf{H}_{\bar{\mathbb{S}}} \mathbf{x}_{\bar{\mathbb{S}}}\|_2^2 \text{ s.c. } \sum_{i \in \mathbb{S}} x_i \leq 1$$

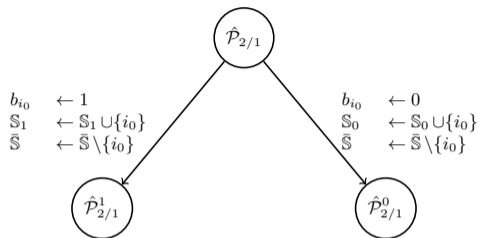
$$0 \leq x_i \leq b_i \quad \forall i \in \bar{\mathbb{S}}$$

La formulation du problème relâché  $\hat{\mathcal{P}}_{2/1}$  en un noeud :

$$(\hat{\mathcal{P}}_{2/1}) \quad \min_{\substack{\mathbf{b}_{\bar{\mathcal{S}}} \in [0,1]^{\bar{n}}, \mathbf{x}_{\bar{\mathcal{S}}} \in [0,1]^{\bar{n}} \\ \mathbf{x}_{\mathcal{S}_1} \in [0,1]^{n_1}}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_{\mathcal{S}_1} \mathbf{x}_{\mathcal{S}_1} - \mathbf{H}_{\bar{\mathcal{S}}} \mathbf{x}_{\bar{\mathcal{S}}}\|_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \sum_{i \in \bar{\mathcal{S}}} x_i \leq 1, \quad 0 \leq x_i \leq b_i \quad \forall i \in \bar{\mathcal{S}}$$

**Le principe de branchement** : soit  $i_0 \in \bar{\mathcal{S}}$





## Les 4 branchements

Soient  $x^*$  une solution optimale pour  $\hat{P}_{2/1}$  et  $i_0 \in \bar{S}$  la variable de branchement :

**Cas 1 :**  $x_{i_0}^* = 0$  et  $b_{i_0} \leftarrow 1 \Rightarrow$  La solution à  $\hat{P}_{2/1}^1$  est identique à celle de  $\hat{P}_{2/1}$  ;

**Cas 2 :**  $x_{i_0}^* = 0$  et  $b_{i_0} \leftarrow 0 \Rightarrow$  La solution à  $\hat{P}_{2/1}^0$  est identique à celle de  $\hat{P}_{2/1}$  ;

**Cas 3 :**  $x_{i_0}^* \neq 0$  et  $b_{i_0} \leftarrow 1 \Rightarrow$  La solution à  $\hat{P}_{2/1}^1$  est identique à celle de  $\hat{P}_{2/1}$  ;

**Cas 4 :**  $x_{i_0}^* \neq 0$  et  $b_{i_0} \leftarrow 0 \Rightarrow$  La solution à  $\hat{P}_{2/1}^0$  est modifiée par exclusion de  $x_{i_0}$ .

## Stratégie de recherche : Parcours en profondeur d'abord

Explore en priorité les nœuds les plus éloignés de la racine afin de trouver rapidement des solutions  $K$ -sparse.

## Stratégie de branchement : Abondance maximale

Soit  $x^*$  est la solution obtenue au nœud parent.

Choix de l'indice  $i_0^* \in \bar{S}$  tel que  $i_0^* = \arg \max_{i \in \bar{S}} \{x_i^*\}$

## Stratégies d'élagage

2 règles d'élagage des branches de l'arbre :

- **Dominance** : la borne inférieure obtenue est supérieure à la borne supérieure globale.
- **Optimalité** : la solution obtenue est  $K$ -sparse et retourne une meilleure borne inférieure.



- 1 Introduction générale au problème de démixtion spectrale
  - Formulation du problème de démixtion
  - Contrainte de parcimonie, de non négativité et de somme unitaire.
  - Positionnement de ces travaux.
- 2 Algorithme de B&B pour le démixtion spectrale
  - Reformulation MIP
  - Impact des branchements sur le problème de démixtion.
  - Stratégies de recherche, de branchement et de dominance.
- 3 Mise en œuvre de l'algorithme de B&B
  - Principes de branchements et spécificités des nœuds.
  - Précision sur les opérations du B&B
  - Exécution du B&B sur un problème avec  $K = 3$
- 4 Stratégies pour l'obtention de bornes inférieures
  - Résolution de problèmes d'optimisation quadratique.
  - Méthode de continuation homotopique
  - Algorithme de résolution pour les problèmes FCLS
- 5 Expérimentations numériques
  - Analyses des résultats
  - Profils de performances
- 6 Conclusions et perspectives

Nous avons prouvé que pour le problème  $\hat{\mathcal{P}}_{2/1}$  :

- La contrainte de parcimonie est inactive ;
- Un seul cas de branchement amène à une ré-optimisation ( $x_{i_0}^* \neq 0$  et  $b_{i_0} \leftarrow 0$  avec  $i_0 \in \bar{\mathbb{S}}$ ) ;
- le problème relâché  $\hat{\mathcal{P}}_{2/1}$  peut être formulé sans variables binaires  $\mathbf{b} \in \{0, 1\}^Q$  ;

### Notre objectif :

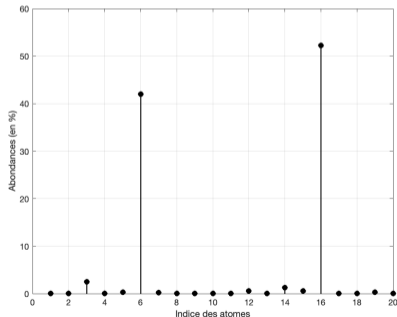
Utiliser ces observations pour mettre en œuvre notre algorithme de branch-and-bound dédié au problème de démelange spectral parcimonieux.

**Remarque :** Les variables  $\mathbf{b} \in \{0, 1\}^Q$  n'entrent pas dans le calcul des bornes inférieures mais restent présentes dans l'arbre de branch-and-bound.

**Au début :**  $\bar{S} = S = Q$  et  $S_1 = S_0 = \emptyset$ .

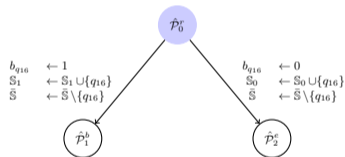
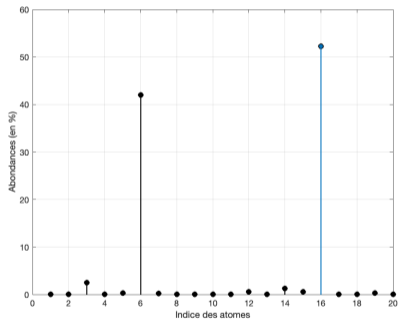
$$(\hat{\mathcal{P}}_0^r) \quad \min_{\mathbf{x}_{\bar{S}} \in [0,1]^{\bar{n}}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_{\bar{S}} \mathbf{x}_{\bar{S}}\|_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \sum_{i \in \bar{S}} x_i \leq 1, \quad 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in \bar{S}$$

**Objectif :** obtenir une première solution **non parcimonieuse** où les valeurs des variables  $x_i \forall i \in \bar{S}$  vont nous permettre de réaliser les  $K$  premiers branchements.

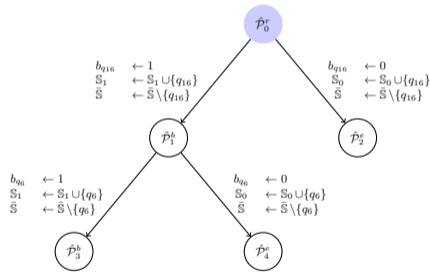
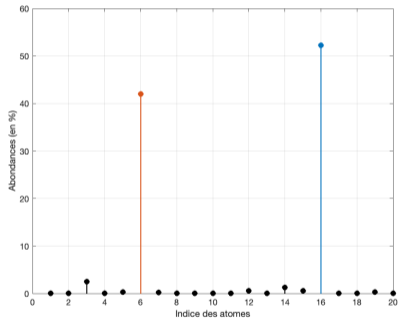


$\hat{\mathcal{P}}_0^r$

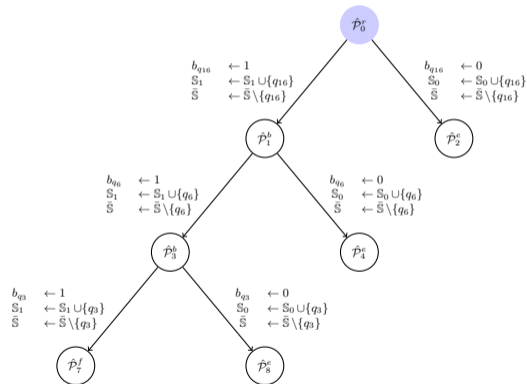
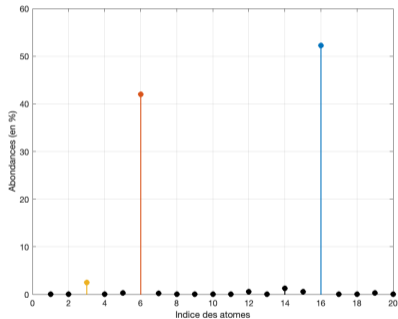
**Rappel :** Les branchements de type  $x_{i_0}^* \neq 0$  et  $b_{i_0} \leftarrow 1$  ne modifient pas la solution obtenue au noeud parent.



Et on recommence : tant que  $\text{card}(\mathbb{S}_1) < 3$



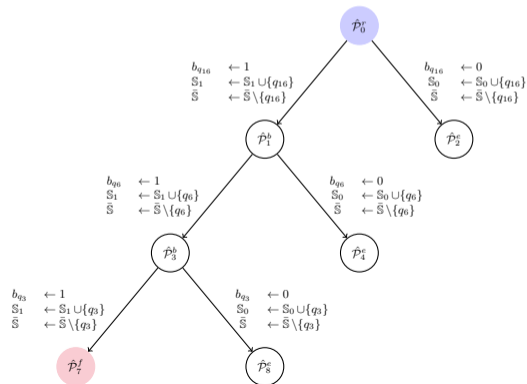
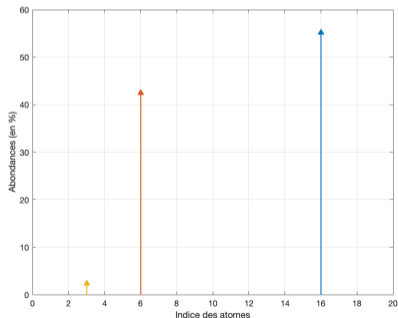
Et on recommence : tant que  $\text{card}(\mathbb{S}_1) < 3$



**Stop!**  $\text{card}(\mathbb{S}_1) = 3$

$$(\hat{\mathcal{P}}_n^f) \quad \min_{\mathbf{x}_{\mathbb{S}_1} \in [0,1]^{n_1}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_{\mathbb{S}_1} \mathbf{x}_{\mathbb{S}_1}\|_2^2 \text{ s.c. } \sum_{i \in \mathbb{S}_1} x_i \leq 1, \quad 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in \mathbb{S}_1, \quad x_i = 0 \quad \forall i \in \bar{\mathbb{S}} \cup \mathbb{S}_0$$

**Objectif :** obtenir les meilleures solutions réalisables à  $K$  composantes *i.e.* des bornes supérieures en saturant la contrainte de parcimonie.

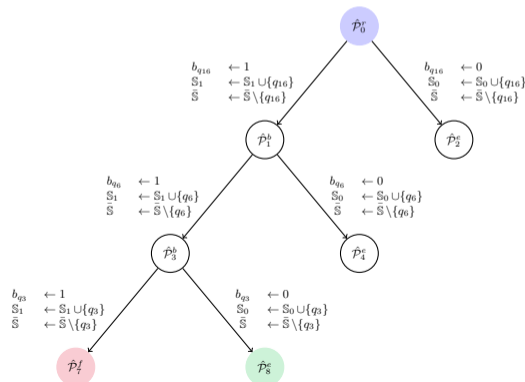
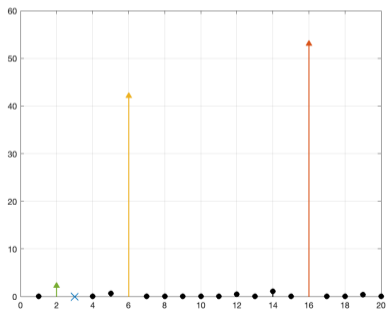


# Présentation de notre branch-and-bound dédié avec $K = 3$ - Nœuds d'exploration

**On élague et on remonte :**  $\text{card}(\mathbb{S}_1) = 2$  et avec le parcours profondeur d'abord

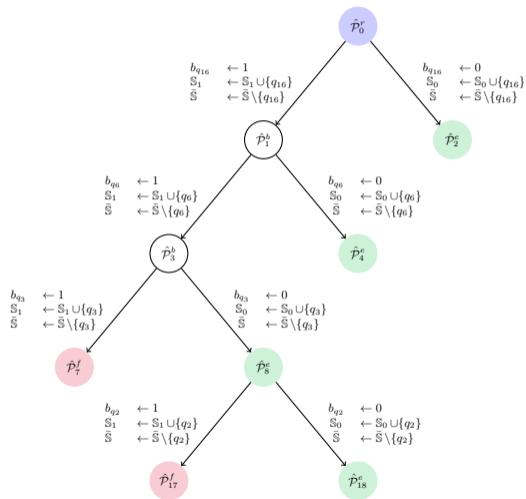
$$(\hat{\mathcal{P}}_n^e) \quad \min_{\mathbf{x}_{\bar{\mathbb{S}}} \in [0,1]^{\bar{n}}, \mathbf{x}_{\mathbb{S}_1} \in [0,1]^{n_1}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_{\mathbb{S}_1} \mathbf{x}_{\mathbb{S}_1} - \mathbf{H}_{\bar{\mathbb{S}}} \mathbf{x}_{\bar{\mathbb{S}}}\|_2^2 \text{ s.c. } \sum_{i \in \mathbb{S}_1 \cup \bar{\mathbb{S}}} x_i \leq 1, \quad 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in \mathbb{S}_1 \cup \bar{\mathbb{S}}$$

**Objectif :** Intégrer un nouvel atome à la **meilleure solution réalisable à  $K$  composantes** et se poser la question : *Pouvons nous trouver une solution minimisant l'erreur en norme  $\ell_2$  avec une composante différente ?*





# Présentation de notre branch-and-bound dédié avec $K = 3$



- 1 Introduction générale au problème de démixtion spectrale
  - Formulation du problème de démixtion
  - Contrainte de parcimonie, de non négativité et de somme unitaire.
  - Positionnement de ces travaux.
- 2 Algorithme de B&B pour le démixtion spectrale
  - Reformulation MIP
  - Impact des branchements sur le problème de démixtion.
  - Stratégies de recherche, de branchement et de dominance.
- 3 Mise en œuvre de l'algorithme de B&B
  - Principes de branchements et spécificités des nœuds.
  - Précision sur les opérations du B&B
  - Exécution du B&B sur un problème avec  $K = 3$
- 4 Stratégies pour l'obtention de bornes inférieures
  - Résolution de problèmes d'optimisation quadratique.
  - Méthode de continuation homotopique
  - Algorithme de résolution pour les problèmes FCLS
- 5 Expérimentations numériques
  - Analyses des résultats
  - Profils de performances
- 6 Conclusions et perspectives

## Stratégie 1 - Résolution par solveurs de programmation quadratique

Notre problème en un nœud  $n$  quelconque de l'arbre :

$$(\hat{\mathcal{P}}_{2/1}^n) \quad \min_{\substack{\mathbf{b}_{\bar{S}} \in \{0,1\}^{\bar{n}}, \mathbf{x}_{\bar{S}} \in [0,1]^{\bar{n}} \\ \mathbf{x}_{S_1} \in [0,1]^{n_1}}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_{S_1} \mathbf{x}_{S_1} - \mathbf{H}_{\bar{S}} \mathbf{x}_{\bar{S}}\|_2^2 \text{ s.c. } \sum_{i \in S} x_i \leq 1, \quad 0 \leq x_i \leq b_i \quad \forall i \in \bar{S}$$

**Remarque :** Les variables  $\mathbf{b} \in \{0,1\}^Q$  n'entrent pas dans le calcul des bornes inférieures mais restent présentes dans l'arbre de branch-and-bound :  $b_q = 1 \Rightarrow x_q \in S_1$  et  $b_q = 0 \Rightarrow x_q \in S_0 \quad \forall q \in \bar{S}$ .

Principe :

Passer le problème en paramètre d'un solveur de programmation quadratique.

Mais ...

Pratique **mais** pas très spécifique pour ce problème.

**Reformulation nécessaire :** Erreur rencontrée dans le cas de systèmes sous-déterminés *i.e.*  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times Q}$  et  $N \leq Q$  et pour lesquels Cplex QP considère que la forme quadratique  $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{x}$  est semie définie positive :

$$\min_{\mathbf{x} \in [0,1]^{\bar{n}}} \frac{1}{2} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2^2 \text{ s.c. } \sum_{i \in \bar{S}} x_i \leq 1, \quad 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in \bar{S}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{H}_{\bar{S}} \mathbf{x}_{\bar{S}}$$

**Proposée par :** [Donoho and Tsaig, 2008; Malioutov et al., 2005] pour le critère mathématique des moindres carrés pénalisé en norme  $\ell_1$  et sans contrainte.

**Utilisée par :** [Ben Mhenni, 2020] pour le calcul de bornes inférieures dans un branch-and-bound sans les contraintes.

### Principe :

- Intégrer les contraintes de somme unitaire et de non négativité dans la fonction objectif pénalisée par  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  ;
- Faire décroître ce terme pour construire les *chemins de régularisation* linéaire par morceaux en fonction de  $\lambda$  ;
- Répéter la construction jusqu'à ce que la contrainte de somme unitaire soit saturée *i.e.*  $\|x\|_1 = \lambda_c = 1$  .

**Avantage :** S'adapte sans difficulté au problème considéré, la somme unitaire faisant office de critère d'arrêt.

Le problème  $\hat{\mathcal{P}}_{2/1}^n$  reformulé :

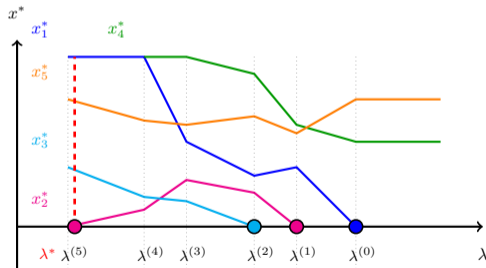
$$\min_{\substack{\mathbf{x}_{\bar{\mathbb{S}}} \in [0,1]^{\bar{n}} \\ \mathbf{x}_{\mathbb{S}_1} \in [0,1]^{n_1}}} F(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_{\mathbb{S}_1} \mathbf{x}_{\mathbb{S}_1} - \mathbf{H}_{\bar{\mathbb{S}}} \mathbf{x}_{\bar{\mathbb{S}}}\|_2^2 + \lambda (\|\mathbf{x}\|_1 - 1)$$

**Principe :**

- Les ensembles  $\mathbb{S}_1$  et  $\bar{\mathbb{S}}$  sont identiques sur un intervalle  $[\lambda^{(t)}, \lambda^{(t-1)}]$ ;
- Faire décroître la valeur de  $\lambda$  va entraîner des modifications de  $\text{supp}(\mathbf{x})$  i.e.  $i \in \bar{\mathbb{S}} \rightarrow i \in \mathbb{S}_1$  ou  $i \in \mathbb{S}_1 \rightarrow i \in \bar{\mathbb{S}}$ ;
- Répéter l'action jusqu'à ce que  $\|\mathbf{x}\|_1 = \lambda_c = 1$

Le problème  $\hat{\mathcal{P}}_{2/1}^n$  reformulé :

$$\min_{\substack{\mathbf{x}_{\bar{S}} \in [0,1]^{\bar{n}} \\ \mathbf{x}_{S_1} \in [0,1]^{n_1}}} F(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_{S_1} \mathbf{x}_{S_1} - \mathbf{H}_{\bar{S}} \mathbf{x}_{\bar{S}}\|_2^2 + \lambda (\|\mathbf{x}\|_1 - 1)$$



### Synthèse sur la méthode homotopique :

- La méthode homotopique intègre facilement les contraintes de non négativité et de somme unitaire.
- Le nombre d'atomes ajoutés au support est toujours supérieur à celui des atomes sortant  
⇒ L'homotopie permet de mieux saturer la contrainte de somme unitaire.
- La résolution des problèmes aux nœuds feuilles de l'arbre ne sature pas toujours la contrainte de somme unitaire.

### Moralité :

Développement d'une stratégie hybride de résolution des problèmes aux nœuds :

**nœuds racine et d'explorations (les plus nombreux)** : par la méthode homotopique ;

**nœuds feuilles** : par solveur de programmation quadratique.

Notre problème en un nœud  $n$  quelconque de l'arbre :

$$(\hat{\mathcal{P}}_{2/1}^n) \quad \min_{\substack{\mathbf{b}_{\bar{\mathcal{S}}} \in \{0,1\}^{\bar{n}}, \mathbf{x}_{\bar{\mathcal{S}}} \in [0,1]^{\bar{n}} \\ \mathbf{x}_{\mathcal{S}_1} \in [0,1]^{n_1}}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_{\mathcal{S}_1} \mathbf{x}_{\mathcal{S}_1} - \mathbf{H}_{\bar{\mathcal{S}}} \mathbf{x}_{\bar{\mathcal{S}}}\|_2^2 \text{ s.c. } \sum_{i \in \bar{\mathcal{S}}} x_i \leq 1, \quad 0 \leq x_i \leq b_i \quad \forall i \in \bar{\mathcal{S}}$$

**Observation :**  $\hat{\mathcal{P}}_{2/1}^n$  est un problème spécifique, pour lequel un algorithme a été proposé pour le démelange spectral (positivité, somme unitaire) [Heinz et al., 2001].

**Moralité :** à l'heure actuelle

- Méthode utilisée comme boîte noire à partir de l'algorithme fourni par S.Moussaoui ;
- L'algorithme est uniquement valable sur les instances  $N \geq Q$  ;

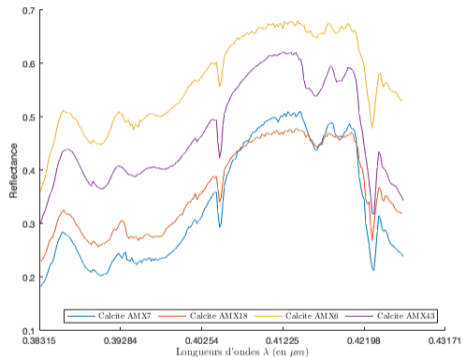


- 1 Introduction générale au problème de démixtion spectrale
  - Formulation du problème de démixtion
  - Contrainte de parcimonie, de non négativité et de somme unitaire.
  - Positionnement de ces travaux.
- 2 Algorithme de B&B pour le démixtion spectrale
  - Reformulation MIP
  - Impact des branchements sur le problème de démixtion.
  - Stratégies de recherche, de branchement et de dominance.
- 3 Mise en œuvre de l'algorithme de B&B
  - Principes de branchements et spécificités des nœuds.
  - Précision sur les opérations du B&B
  - Exécution du B&B sur un problème avec  $K = 3$
- 4 Stratégies pour l'obtention de bornes inférieures
  - Résolution de problèmes d'optimisation quadratique.
  - Méthode de continuation homotopique
  - Algorithme de résolution pour les problèmes FCLS
- 5 Expérimentations numériques
  - Analyses des résultats
  - Profils de performances
- 6 Conclusions et perspectives

## Dictionnaire spectral USGS

Ce dictionnaire est composé de :

- $Q = 498$  signatures spectrales pures de minéraux ;
- $N = 224$  longueurs d'onde allant de  $0,3$  à  $2,7 \mu m$ .



**Observation :** certains atomes sont fortement corrélés  $\Rightarrow$  les problèmes sont encore plus difficiles.

## Le rapport signal/bruit

Pour quantifier le niveau de bruit dans le modèle, nous utilisons le rapport signal/bruit (SNR) défini comme le rapport entre la puissance du signal et la puissance du bruit

### Idée générale :

- si le  $\text{SNR} = 0$ , alors cela signifie qu'il y a *autant de bruit que de signal* dans le modèle ;
- si le  $\text{SNR} = \infty$ , alors cela signifie que le modèle est non bruité.

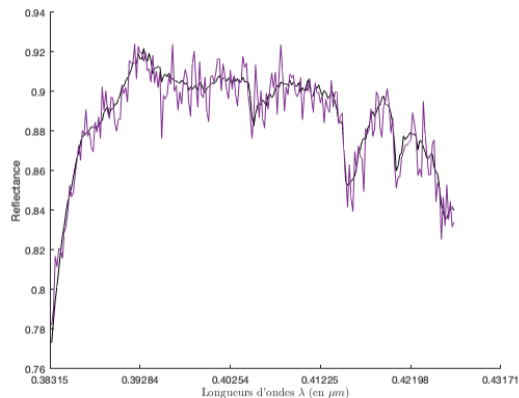
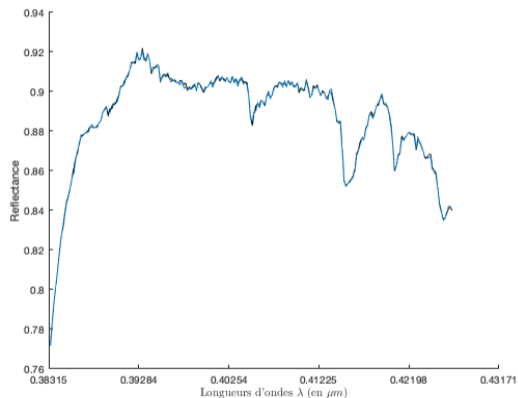


FIGURE – L'atome observé avec différents niveaux de bruit : sans bruit, peu bruité et fortement bruité.

Nos instances sont générées avec les valeurs suivantes :

**le nombre de signatures spectrales pures** :  $Q \in \{20, 100, 160, 300, 400\}$  ;

**le nombre de bandes spectrales** :  $N = 224$  ;

**le coefficient de parcimonie** :  $K \in \llbracket 3, 7 \rrbracket$  ;

**le niveau de bruit** :  $\text{SNR} \in \{\infty, 55, 45\}$  en dB.

Les dénominations des méthodes de résolution :

**MIP Cplex DT**  $x$  : le solveur MIP Cplex avec un saut de dualité  $\delta = 10^{-x}$  et  $x \in \llbracket 4, 8 \rrbracket$  ;

**BB R Cplex QP** le solveur Cplex QP ;

**BB R Hom** la méthode Homotopique ;

**BB R FCLS** l'algorithme FCLS.

Quid de la difficulté des problèmes :

$K$  :  $K = 3 \sim$  facile     $K = 7 \sim$  difficile

$\text{SNR}$  :  $\text{SNR} = \infty \sim$  facile     $\text{SNR} = 45\text{dB} \sim$  difficile

**Objectif :** définir une métrique pour comparer les performances des solveurs pour un critère donné e.g. le temps d'exécution.

**Principe :** Soient  $\mathcal{P}$  un ensemble de problèmes et  $\mathcal{S}$  un ensemble de solveurs et le coût  $t_{p,s}$  associé temps de résolution tel que :

$$t_{p,s} = \begin{cases} t_{p,s} & \text{si } s \text{ résout } p \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall p \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S}$$

Le *rapport de performance* évalue le coût  $t_{p,s}$  par rapport au meilleur algorithme proposant une solution à  $p$

$$\alpha_{p,s} = \frac{t_{p,s}}{\min_{s \in \mathcal{S}} \{t_{p,s} : p \in \mathcal{P}\}}, \quad \alpha_{p,s} \geq 1 \quad \forall p \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S}$$

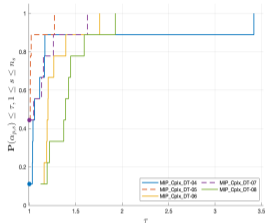
La fonction de performance d'un algorithme  $s$  :

$$\rho_s : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] : \quad \tau \mapsto \frac{1}{\text{card}(\mathcal{P})} \text{card} \{p \in \mathcal{P} : \alpha_{p,s} \leq \tau\} \quad \forall s \in \mathcal{S}$$

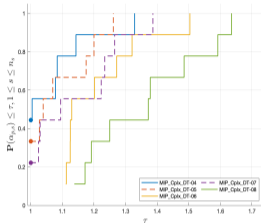
Les deux valeurs extrêmes nous intéressent :

- $\rho_s(1)$  : la proportion d'instances sur lesquelles le solveur  $s$  a été le plus performant ;
- $\rho_s(\alpha_{\max})$  : la fraction de problèmes résolus par l'algorithme  $s$  avec  $\alpha_{\max} = \max_{p \in \mathcal{P}, s \in \mathcal{S}} \{\alpha_{p,s}\}$

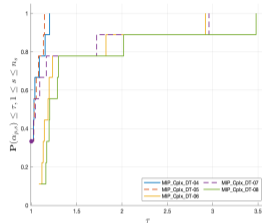
# Analyses des résultats - Profils de performance - Solveurs MIP et saut de dualité



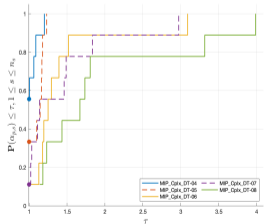
$K = 3$



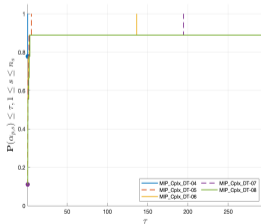
$K = 4$



$K = 5$



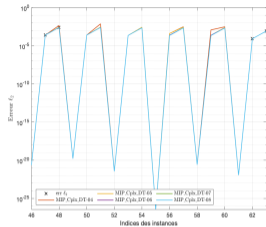
$K = 6$



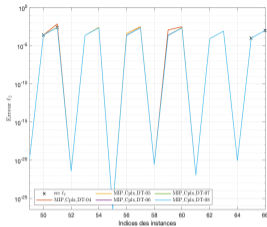
$K = 7$

Méthodes : MIP\_Cplex\_DT\_ $x$   
 $x = 4, x = 5, x = 6,$   
 $x = 7$  et  $x = 8$

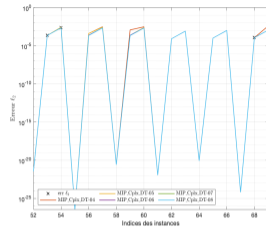
# Analyses des résultats - Erreur en norme $\ell_2$ - Solveurs MIP et saut de dualité



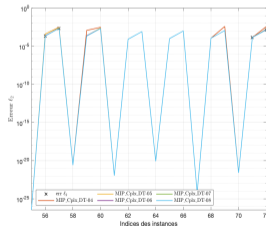
$K = 3$



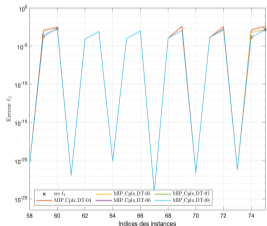
$K = 4$



$K = 5$



$K = 6$



$K = 7$

Méthodes : MIP\_Cplex\_DT\_x

$x = 4, x = 5, x = 6,$   
 $x = 7$  et  $x = 8$



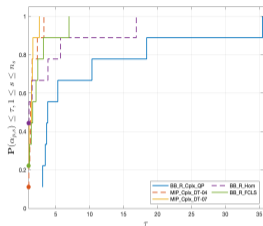
## Synthèse

- **MIP Cplex DT 4** est le plus rapide pour  $K \in \llbracket 4, 7 \rrbracket$  ;
- $\delta = 10^{-x}$  avec  $x \in \{7, 8\}$  est nécessaire pour limiter les variations de l'erreur en norme  $\ell_2$  sur les instances très bruitées ;

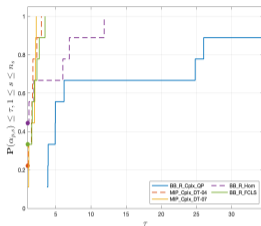
**Explications :** un saut de dualité élevé e.g.  $\delta = 10^{-4}$  permet de relâcher les tolérances numériques **mais** c'est un **point critique** car nous pouvons perdre l'optimalité des solutions

**Moralité :** Cplex MIQP nous impose un **compromis** entre rapidité et qualité de résolution.

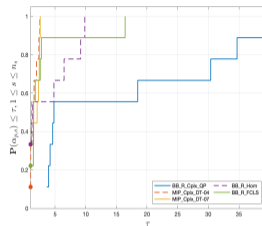
# Analyses des résultats - Profils de performance - instance $N \geq Q$



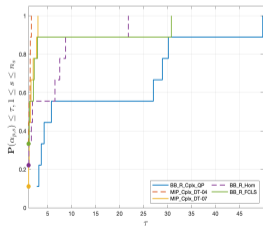
$K = 3$



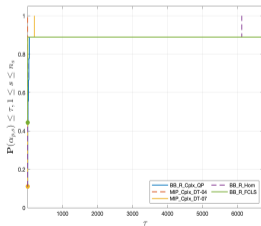
$K = 4$



$K = 5$



$K = 6$

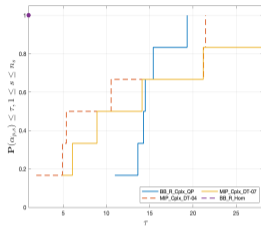


$K = 7$

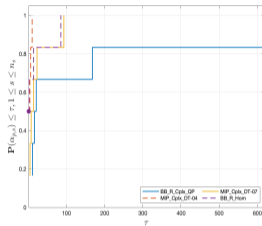
Méthodes :

BB\_R\_Cplex\_QP  
MIP\_Cplex\_DT-4  
MIP\_Cplex\_DT-7  
BB\_R\_Hom  
BB\_R\_FCLS

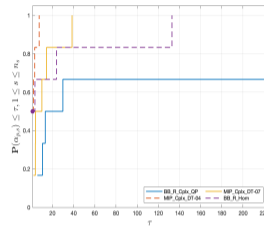
# Analyses des résultats - Profils de performance - instance $N \leq Q$



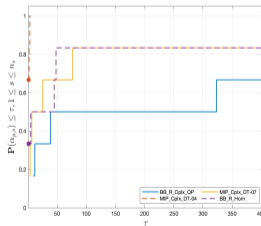
$K = 3$



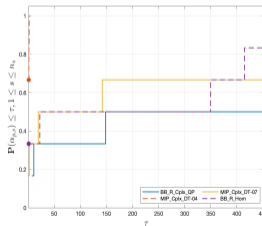
$K = 4$



$K = 5$



$K = 6$



$K = 7$

Méthodes :

- BB\_R\_Cplex\_QP
- MIP\_Cplex\_DT-4
- MIP\_Cplex\_DT-7
- BB\_R\_Hom

## Synthèse

### instances $N \geq Q$

- pour  $K \in \{3, 4, 5\}$  **BB R Hom** est la méthode la plus efficace ;
- pour  $K \in \{6, 7\}$  **BB R FCLS** est la méthode la plus rapide.

### instances $N \leq Q$

- pour  $K \in \{3, 4, 5\}$  **BB R Hom** est la méthode la plus efficace ;
- pour  $K \in \{6, 7\}$  **MIP Cplex DT 4** est le plus rapide **mais** au détriment de la qualité de la solution.  
↪ pour  $K \in \{6, 7\}$  **BB R Hom** est le plus rapide.

- 1 Introduction générale au problème de démixtion spectrale
  - Formulation du problème de démixtion
  - Contrainte de parcimonie, de non négativité et de somme unitaire.
  - Positionnement de ces travaux.
- 2 Algorithme de B&B pour le démixtion spectrale
  - Reformulation MIP
  - Impact des branchements sur le problème de démixtion.
  - Stratégies de recherche, de branchement et de dominance.
- 3 Mise en œuvre de l'algorithme de B&B
  - Principes de branchements et spécificités des nœuds.
  - Précision sur les opérations du B&B
  - Exécution du B&B sur un problème avec  $K = 3$
- 4 Stratégies pour l'obtention de bornes inférieures
  - Résolution de problèmes d'optimisation quadratique.
  - Méthode de continuation homotopique
  - Algorithme de résolution pour les problèmes FCLS
- 5 Expérimentations numériques
  - Analyses des résultats
  - Profils de performances
- 6 Conclusions et perspectives

### Synthèse de ces travaux de recherche

- intérêt de développer des solutions algorithmiques spécifiques pour le démixage parcimonieux sous contraintes de somme à 1 et de non négativité ;
- les performances supérieures des méthodes dédiées par rapport au solveur générique CPLEX ;
- exploiter les spécificités mathématiques des problèmes permet un gain en temps de calcul ;

### Une suite ?

Ces travaux font office de point de départ à des recherches visant à améliorer l'évaluation des nœuds de notre arbre de branch-and-bound.

Les axes de recherche à exploiter peuvent être :

- la généralisation de l'algorithme FCLS proposé par Heinz et al. [2001] au cas des systèmes sous-déterminés ;
- l'étude de nouveaux algorithmes pour l'évaluation des nœuds ;
- comparer nos performances avec celles des autres algorithmes présentés dans la littérature ;
- de tester de nouvelles stratégies de branchements ;
- ...

Merci pour votre attention

- Ben Mhenni, R. (2020). Méthodes de programmation en nombres mixtes pour l'optimisation parcimonieuse en traitement du signal. PhD thesis, ECOLE CENTRALE DE NANTES.
- Clark, R., Swayze, G., Wise, R., Livo, K., Hoefen, T., Kokaly, R., and Sutley, S. (2003). USGS digital spectral library splib05a. US Geological Survey, Digital Data Series, 231.
- Dolan, E. D. and Moré, J. J. (2002). Benchmarking optimization software with performance profiles. Mathematical Programming, 91(2) :201–213.
- Donoho, D. L. and Tsaig, Y. (2008). Fast Solution of  $\ell_1$  Norm Minimization Problems When the Solution May Be Sparse. IEEE Transactions on Information Theory, 54(11) :4789–4812.
- Heinz, D. C. et al. (2001). Fully constrained least squares linear spectral mixture analysis method for material quantification in hyperspectral imagery. IEEE transactions on geoscience and remote sensing, 39(3) :529–545.
- lordache, M.-D., Bioucas-Dias, J. M., and Plaza, A. (2011). Sparse Unmixing of Hyperspectral Data. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 49(6) :2014–2039.
- Land, A. H. and Doig, A. G. (1960). An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. Econometrica : Journal of the Econometric Society, 28(3) :497–520.
- Malioutov, D. M., Cetin, M., and Willsky, A. S. (2005). Homotopy continuation for sparse signal representation. 5 :733–736.
- Natarajan, B. K. (1995). Sparse approximate solutions to linear systems. SIAM Journal on Computing, 24(2) :227–234.
- Singer, R. B. and McCord, T. B. (1979). Mars-large scale mixing of bright and dark surface materials and implications for analysis of spectral reflectance. In Lunar and Planetary Science Conference Proceedings, volume 10, pages 1835–1848.
- Tropp, J. A. and Wright, S. J. (2010). Computational Methods for Sparse Solution of Linear Inverse Problems. Proceedings of the IEEE, 98(6).



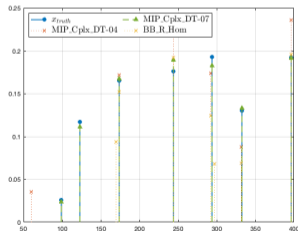
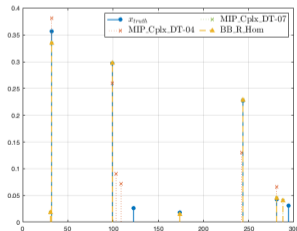
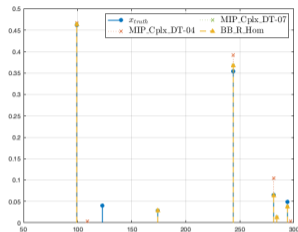
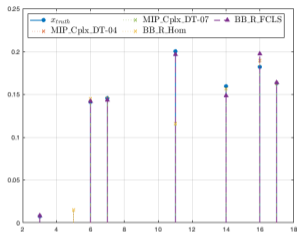
Le problème  $\hat{\mathcal{P}}_{2/1}^n$  reformulé :

$$\begin{aligned} \min_{\substack{\mathbf{x}_{\bar{\mathbb{S}}} \in [0,1]^{\bar{n}} \\ \mathbf{x}_{\mathbb{S}_1} \in [0,1]^{n_1}}} \quad & F(\mathbf{x}, \lambda) = J(\mathbf{x}) + \lambda p(\mathbf{x}) \\ \text{avec} \quad & J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_{\mathbb{S}_1} \mathbf{x}_{\mathbb{S}_1} - \mathbf{H}_{\bar{\mathbb{S}}} \mathbf{x}_{\bar{\mathbb{S}}}\|_2^2 \\ & p(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_1 - 1 \end{aligned}$$

La condition d'optimalité :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \in \nabla F(\mathbf{x}, \lambda) &\iff \mathbf{0} \in \nabla J(\mathbf{x}^*) + \lambda \partial p(\mathbf{x}^*) \\ &\iff \begin{cases} \mathbf{H}^\top(\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{x}) = \lambda \text{sign}(\mathbf{x}^*) & \forall x_q \neq 0 \iff q \in \mathbb{S}_1 \\ |\mathbf{H}^\top(\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{x})| \leq \lambda & \forall x_q = 0 \iff q \in \bar{\mathbb{S}} \end{cases} \end{aligned}$$

# Backup Slides 2 : Analyses des résultats - Pour aller plus loin : erreurs de détections - SNR = 45 dB



## Le rapport signal/bruit

Pour quantifier le niveau de bruit dans le modèle, nous utilisons le rapport signal/bruit (SNR) défini comme le rapport entre la puissance du signal et la puissance du bruit exprimé en décibels

$$\text{SNR}^{\text{dB}} = 10 \log_{10} (\text{SNR}) = 10 \log_{10} \left( \frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{bruit}}} \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{\|\mathbf{H} \mathbf{x}\|_2^2}{\|\varepsilon\|_2^2} \right)$$

### Idée générale :

- si le  $\text{SNR} = 0$ , alors cela signifie qu'il y a *autant de bruit que de signal* dans le modèle ;
- si le  $\text{SNR} = \infty$ , alors cela signifie que le modèle est non bruité.

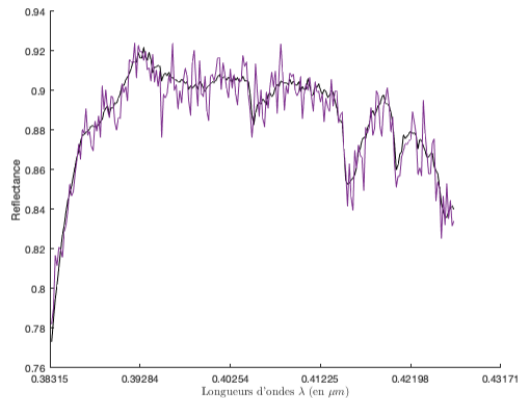
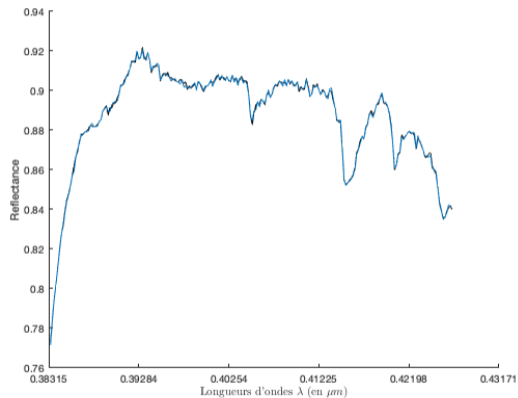


FIGURE – L'atome  $h_{10}$  observé avec différents niveaux de bruit : sans bruit ( $\text{SNR} = \infty$ ), 60 dB et 30 dB.